★启用前注意保密

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（二）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	C	D	B	A	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BD	CD	ABD	BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。（第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分）

13. $\frac{3}{2}$　14. $-\frac{4}{3}$　15. $\sqrt{10}$　16. -1；4

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17. （10 分）

解：由 $3\sin C+2\sqrt{3}\sin^2\frac{C}{2}=\sqrt{3}$，得 $3\sin C+\sqrt{3}(1-\cos C)=\sqrt{3}$，…………… 1 分

即 $3\sin C-\sqrt{3}\cos C=0$，所以 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=0$. …………………………… 2 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$. …………………………………………… 4 分

选择条件①：由 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc$，得 $2bc\cdot\cos A=bc$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 6 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………… 7 分

所以 $B=\pi-A-C=\frac{\pi}{2}$. 所以 $b=2c=4\sqrt{3}$，$a=\sqrt{b^2-c^2}=6$. ………………9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}+6$. ………………10 分

选择条件②：由 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}a$，得$\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}a$，所以 $b=4\sqrt{3}$. ………………6 分

由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

所以 $12=48+a^2-12a$，即 $a^2-12a+36=0$. ………………8 分

解得 $a=6$. ………………9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}+6$. ………………10 分

选择条件③：由 $a(a\cos C+c\cos A)=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2$ 及正弦定理得，

$a(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\frac{\sqrt{3}}{2}b\sin B$. ………………5 分

所以 $a\sin(A+C)=\frac{\sqrt{3}}{2}b\sin B$. ………………6 分

所以 $a\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}b\sin B$，即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$. ………………7 分

由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

所以 $12=\frac{3}{4}b^2+b^2-\frac{3}{2}b^2$. 所以 $b=4\sqrt{3}$，$a=\frac{\sqrt{3}}{2}b=6$. ………………9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}+6$. ………………10 分

18. (12 分)

(1) 证明：因为 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$，

所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2a_{n+1}-4a_n=2(a_{n+1}-2a_n)$.

注意到 $a_2-2a_1=2\neq 0$，………………2 分

所以$\{a_{n+1}-2a_n\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. ………………4 分

(2) 解：由（1）知$\{a_{n+1}-2a_n\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $a_{n+1}-2a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$. ………………5 分

所以$\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}=1$. ………………6 分

又$\frac{a_1}{2^0}=1$，所以$\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，

所以$\frac{a_n}{2^{n-1}}=1+(n-1)\times 1=n$，即 $a_n=n\times 2^{n-1}$. ………………8 分

所以 $S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$，①

所以 $2S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$，② ………………9 分

所以① - ②，得 $-S_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n$ ………………10 分

$$=\frac{2^0\times(1-2^n)}{1-2}-n\times 2^n$$ ………………11 分

所以 $S_n=(n-1)2^n+1$. ………………12 分

19.（12 分）

（1）证明：因为 AB 是半圆 E 的直径，C 是半圆 E 上异于 A，B 的一点，

所以 $AC\perp BC$. ………………………………………………………………………… 1 分

因为 $\angle BAC=30°$，$AB=4$，所以 $BC=2$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{3}$.

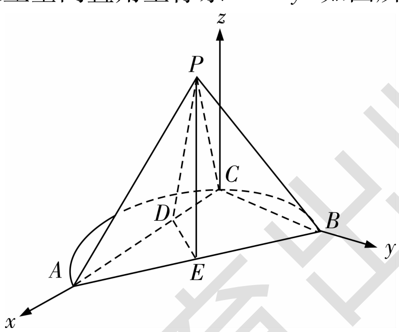
因为 $PA\perp PC$，$\angle PAC=30°$，所以 $PC=\sqrt{3}$.

因为 $PB=\sqrt{7}$，所以 $PC^2+BC^2=PB^2$. 所以 $PC\perp BC$. ……………………………… 3 分

因为 $PC\cap AC=C$，…………………………………………………………………… 4 分

所以 $BC\perp$ 平面 PAC. 因为 $PA\subset$ 平面 PAC，所以 $BC\perp PA$. ……………………… 5 分

（2）解：以 C 为原点，CA，CB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，过点 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $C-xyz$ 如图所示，则



$C(0,0,0)$，$A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,2,0)$，$E(\sqrt{3},1,0)$，$D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$，…………………………………………………………………… 7 分

$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$，$\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3},-1,0)$，…………… 8 分

设平面 PDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PE}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+y_1-\frac{3}{2}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{\sqrt{3}}{3}x_1+y_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$，得 $x_1=-\sqrt{3}$，$z_1=-\frac{1}{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=\left(-\sqrt{3},1,-\frac{1}{3}\right)$. …………… 9 分

设平面 PBE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+y_2-\frac{3}{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{3}x_2-y_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=1$，得 $y_2=\sqrt{3}$，$z_2=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$. ……………………… 10 分

因为 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{37}{9}}\times\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{777}}{259}$. ……………… 11 分

所以结合图可知，二面角 $D-PE-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{777}}{259}$. ………………… 12 分

20. （12 分）

解：（1）双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$， ……………… 1 分

所以点 $F(c,0)$ 到渐近线的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{bc}{c}=b$. ………………………… 2 分

所以△FON 的面积为 $\frac{1}{2}|NF|\cdot|ON|=\frac{1}{2}\cdot b\sqrt{c^2-b^2}=\frac{1}{2}\cdot ba=\sqrt{5}$，

即 $ab=2\sqrt{5}$. ……………………………………………………………………… 3 分

因为双曲线 C 的离心率为 $\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{3}{2}$，

所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$，即 $b=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

代入 $ab=2\sqrt{5}$，解得 $a=2$.

所以 $b=\sqrt{5}$.

故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. ……………………………………… 6 分

（2）$k_{MP}\cdot k_{MQ}$ 是定值，理由如下： ……………………………………… 7 分

设 $P(x_1,y_1)$，$M(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_1,-y_1)$，$x_0^2\neq x_1^2$.

所以 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{5}=1,\\ \frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{5}=1,\end{cases}$ ……………………………………………… 9 分

两式相减并整理得 $\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\frac{5}{4}$. ……………………………………… 10 分

所以 $k_{MP}\cdot k_{MQ}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\frac{5}{4}$.

所以 $k_{MP}\cdot k_{MQ}$ 是定值，且该定值为 $\frac{5}{4}$. ………………………………… 12 分

21. （12 分）

解：（1）由已知条件和互斥事件的概率加法公式有

$P(X\leqslant 80)=0.15$，$P(80<X\leqslant 120)=P(X\leqslant 120)-P(X\leqslant 80)=0.35-0.15=0.2$，

$P(120<X\leqslant 200)=P(X\leqslant 200)-P(X\leqslant 120)=0.7-0.35=0.35$，

$P(200<X\leqslant 300)=P(X\leqslant 300)-P(X\leqslant 200)=0.95-0.7=0.25$，

$P(X>300)=1-P(X\leqslant 300)=1-0.95=0.05$. ……………………………… 2 分

则智能设置喷雾头个数 Y 的分布列为：

Y	20	50	80	110	150
P	0.15	0.2	0.35	0.25	0.05

则 $E(Y)=20\times 0.15+50\times 0.2+80\times 0.35+110\times 0.25+150\times 0.05=76$（个）.

…………………………………………………………………………………… 4 分

所以施工期间工地能平均有效降尘的立方米数为

$E(8Y)=8\times E(Y)=8\times 76=608(\text{m}^3)$. ………………………………………… 5 分

（2）①由已知，该工地智能雾化喷淋降尘之后，TSP 日平均浓度 X 达到一级水平的概率为

$P(X\leqslant 120)=0.35+0.05=0.4$， ………………………………………………… 6 分

设未来 10 天中 TSP 日平均浓度能达到一级水平的天数为 ξ，则 $\xi\sim B(10,\ 0.4)$，

所以 $P(\xi\geqslant 2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=1-0.6^{10}-C_{10}^{1}\times 0.4\times 0.6^{9}\approx 1-0.006-4\times 0.01=0.954$.

故该工地在未来 10 天中至少有 2 天 TSP 日平均浓度能达到一级水平的概率约为 0.954. ………………………………………………………………………… 8 分

②该工地智能雾化喷淋降尘之后，TSP 日平均浓度 X 对应喷雾头个数 Y 的分布列为：

TSP 日平均浓度 $X/(\mu\text{g/m}^3)$	$X\leqslant 80$	$80<X\leqslant 120$	$120<X\leqslant 200$	$200<X\leqslant 300$	$X>300$
喷雾头个数 Y/个	20	50	80	110	150
P	0.2	0.2	0.35	0.25	0

则 $E(Y)=20\times 0.2+50\times 0.2+80\times 0.35+110\times 0.25+150\times 0=69.5$（个）， ………………………………………………………………………………… 10 分

若只有当 TSP 日平均浓度在二级及以上水平时启用 150 个喷雾头，则启用喷雾头个数的期望值为 $(0.2+0.2)\times 0+(0.35+0.25)\times 150=90$(个)，大于之前智能启用喷雾头个数的期望值 69.5，由于单个喷雾头出水量一样，所以无法达到节水节能的目的. ……………………………………………………………………… 12 分

22. （12 分）

（1）证明：$f(x)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，

又 $f'(x)=x+(a-1)-\dfrac{a}{x}=\dfrac{(x+a)(x-1)}{x}$， ………………………………… 1 分

因为 $a\geqslant \dfrac{1}{2}>0$，所以令 $f'(x)=0$，得 $x=1$. ………………………………… 2 分

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，也是最小值， ……………………………… 3 分

即 $f(x)_{\min}=f(1)=a-\dfrac{1}{2}\geqslant 0$.

所以当 $a\geqslant \dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$. ………………………………………………… 4 分

（2）解：①当 $a>0$ 时，由（1）可知，当 $x=1$ 时，$f(x)$取得极小值$f(1)=a-\frac{1}{2}$.

又由（1）知，当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时$f(x)\geqslant0$，

要使得$f(x)$有两个零点，则$f(1)=a-\frac{1}{2}<0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$.

此时$f(2)=a(2-\ln 2)>0$，$f(e^{1-\frac{1}{a}})=\frac{1}{2}e^{2-\frac{2}{a}}+(a-1)e^{1-\frac{1}{a}}-a\left(1-\frac{1}{a}\right)>(a-1)$

$(e^{1-\frac{1}{a}}-1)>0$，

所以$f(x)$在$(e^{1-\frac{1}{a}},1)$和$(1,2)$上各有一个零点，满足题意. ………………… 5 分

②当 $-1<a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-a$ 或 $x_2=1$.

$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,-a)$	$-a$	$(-a,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当 $x=-a$ 时，$f(x)$取得极大值$f(-a)=-\frac{1}{2}a^2+a-a\ln(-a)=a\left[-\frac{1}{2}a+1-\ln(-a)\right]$，……………………………………………………………………………… 6 分

令 $u(a)=-\frac{1}{2}a+1-\ln(-a)\ (-1<a<0)$，则 $u'(a)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=-\frac{a+2}{2a}>0$，

所以在$(-1,0)$上，$u(a)$单调递增，

因为 $u(a)>u(-1)=\frac{3}{2}>0$，所以$f(-a)=au(a)<0$，

所以$f(x)$不可能有两个零点. ……………………………………………………… 8 分

③当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$，

在$(0,+\infty)$上，$f(x)$单调递增，所以$f(x)$不可能有两个零点. ………………… 9 分

④当 $a<-1$ 时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,-a)$	$-a$	$(-a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当 $x=1$ 时，$f(x)$取得极大值$f(1)=a-\frac{1}{2}<0$，

所以$f(x)$不可能有两个零点. ……………………………………………………… 11 分

综上所述，若$f(x)$有两个零点，则实数 a 的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ………… 12 分